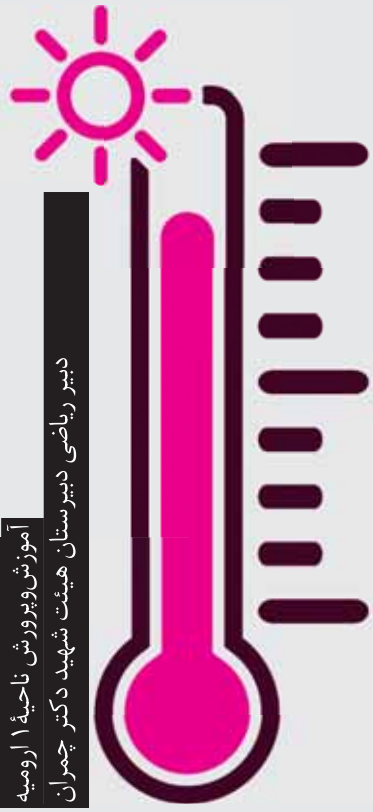
دمای تعادل اجسام از دید ریاضی

اژدر سلیمان‌پور با کفایت
آموزش‌وپرورش ناحیهٔ ۱ ارومیه
دبیر ریاضی دبیرستان هیئت شهید دکتر چمران



چکیده

در این مقاله، با ارائه مفهـــوم ترکیب خطی و ترکیب محدب در اعداد (بردارها)، کاربرد آن در تفســـیر دمای تعادل بین اجسام را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ملاحظه خواهیم کرد که خیلی از پرســـش‌های نسبتاً سخت در رابطه با دمای تعادل، با استفاده از این مفهوم به راحتی پاسخ داده می‌شوند در حالی که بدون این روابط ریاضی، درک چنین مفاهیمی مشکل خواهند بود.

کلیدواژه‌ها: دمای تعادل، ترکیب محدب

۱. ترکیب خطی و ترکیب محدب

مجموعـــه اعداد حقیقی (R) را در نظـــر می‌گیریم. ترکیب خطی دو عدد $a,b\in R$ به‌صورت زیر است:

$$M=c_1a+c_2b \qquad (1)$$

که در آن $c_1,c_2\in R$ و فرض می‌کنیم $a<b$. در (۱) عدد حاصل M یک عدد حقیقی اســـت. M را ترکیب خطی از a و b می‌نامیم. مسئلهٔ مهم برای ما این ویژگی است که مقدار M بین دو عدد a و b یا مســـاوی یکی از آن‌ها باشـــد، و یا خارج بازه [a,b] باشـــد. مثلاً اگـــر $c_1=0$ و $c_2=1$، آنگاه M برابر b اســـت. اکنون حالتی را که در نظر می‌گیریم که مجموع c_1 و c_2 برابر ۱ است. در این حالت ترکیب (۱) به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$N=\lambda a+(1-\lambda)b \quad \text{و} \quad 0\le\lambda\le 1 \qquad (2)$$

به ترکیـــب (۲) ترکیب محدب a و b می‌گوییم. (۲) حالت خاصی از (۱) اســـت. در این ترکیب، مقدار N همواره بین دو عدد a و b یا برابر یکی از آن‌هاســـت. مثلاً اگر $\lambda=1$، N برابر a اســـت و اگر $\lambda=0$، N برابر b خواهد بـــود. برای بقیه مقادیر λ مقدار N بین دو عدد قرار می‌گیرد و دیگر مســـاوی هیچ‌کدام نیست. حال اگر مقدار λ نزدیک ۱ باشد مقدار N نزدیک a، و اگر مقدار λ نزدیک صفر باشد مقدار N نزدیک b خواهد بود.

فـــرم دیگری از ترکیب خطی دو عـــدد a و b به صورت زیر است:

$$k=\frac{c_1}{c_1+c_2}a+\frac{c_2}{c_1+c_2}b \qquad (3)$$

چون مجموع ضرایب در (۳) برابر ۱ است پس k نیز ترکیب محدب از a و b اســـت. اگر مقادیر c_1 و c_2 مثبت باشند آنگاه عدد k همواره بین دو عدد a و b است.

۲. دمای تعادل اجسام

جسم اول به جرم m_1، دمای θ_1 و ظرفیت گرمایی ویژه c_1 و جسم دوم نیز به جرم m_2، دمای θ_2 و ظرفیت ویژه c_2 مفروض هستند. اگر این دو جسم در محیط بی‌در رو[1] در تماس گرمایی قرار گیرند آنگاه دمای تعادل θ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1c_1(\theta - \theta_1) + m_2c_2(\theta - \theta_2) = 0 \quad (۴)$$

با استفاده از رابطه (۴) مقدار دمای تعادل به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\theta = \frac{m_1c_1}{m_1c_1 + m_2c_2}\theta_1 + \frac{m_2c_2}{m_1c_1 + m_2c_2}\theta_2 \quad (۵)$$

این رابطه نشان می‌دهد دمای تعادل، ترکیب خطی محدب از دمای دو جسم داده شده است، زیرا مجموع ضرایب برابر ۱ است. چون هیچ‌یک از جرم‌ها و نیز ظرفیت گرمایی ویژه اجسام صفر نیستند، پس دو نتیجه مهم زیر از رابطه (۵) حاصل می‌شود:

(i) دمای تعادل همواره بین دو دمای θ_1 و θ_2 است و هیچ‌گاه نمی‌تواند کمتر یا مساوی دمای سردتر و بیشتر یا مساوی دمای گرم‌تر باشد.

(ii) اگر دمای دو جسم با هم برابر باشند یعنی $\theta_1=\theta_2$، آنگاه دمای تعادل همواره همان دمای اولیه اجسام خواهد بود و به جرم‌ها و ظرفیت گرمایی ویژه آن‌ها بستگی ندارد. این نتیجه از ساده کردن رابطه (۵) حاصل می‌شود.

اکنون چند حالت خاص را بررسی می‌کنیم:

(حالت اول) فرض کنید در دو جسم با جرم‌های m_1 و m_2، ظرفیت گرمایی ویژه هر دو برابر باشند، در این صورت رابطه (۴) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\theta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\theta_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\theta_2 \quad (۶)$$

از رابطهٔ (۶) نتیجه‌های زیر حاصل می‌شوند:

(i) دمای تعادل، بین دو دمای θ_1 و θ_2 است (البته این نتیجه از رابطه کلی (۵) نیز معلوم بود).

(ii) اگر m_1 بیشتر از m_2 باشد آنگاه دمای تعادل به θ_1 نزدیک‌تر است.

(iii) اگر $m_1=m_2$ آنگاه رابطه (۶) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (۷)$$

پس دمای تعادل، میانگین دو دما است.

(iv) تعمیم رابطه (۶) به سه ماده، به‌صورت زیر است.

$$\theta = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\theta_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\theta_2 + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\theta_3 \quad (۸)$$

مانند بحث بالا می‌توان گفت دمای تعادل در (۸)، به دمای جسم با جرم بیشتر، نزدیک است.

(حالت دوم) حال فرض می‌کنیم ظرفیت گرمایی ویژه دو جسم برابر نبوده ولی جرم‌ها برابر باشند. در این حالت رابطه (۵) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\theta = \frac{c_1}{c_1 + c_2}\theta_1 + \frac{c_1}{c_1 + c_2}\theta_1 \quad (۹)$$

همه نتیجه‌های بالا در این حالت نیز برقرارند. مثلاً ظرفیت گرمایی هر جسم که بیشتر باشد آنگاه دمای تعادل به دمای آن جسم نزدیک‌تر است.

مثال ۱,۲. جسمی به جرم m با ظرفیت گرمایی $4c$ در مجاورت گرمایی جسم دیگری به جرم $3m$ و ظرفیت ویژه c قرار گرفته است. اگر دمای هر دو جسم برابر θ باشد و گرمایی هدر نرود دمای تعادل کدام است؟

(۱) 3θ

(۲) θ

(۳) 4θ

(۴) $\frac{3}{7}\theta$

حل: چون دمای دو جسم ثابت است پس بدون توجه به بقیه پارامترهای مسئله، گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال ۲,۲. دو جسم هم‌جنس با دماهای متفاوت مفروض‌اند. اگر جرم یکی دو برابر جرم دیگری باشد کدام گزینه صحیح است؟

(۱) دمای تعادل به دمای جسم سنگین‌تر نزدیک‌تر است.

(۲) دمای تعادل به دمای جسم سبک‌تر نزدیک‌تر است.

(۳) دمای تعادل فاصله یکسانی از دمای جسم‌ها دارد.
(۴) دمای تعادل از دمای جسم سردتر کوچک‌تر است.

حل. براساس نتیجه (ii)، گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال۳،۲. دمای تعـــادل، در کدام‌یـــک از حالت‌های زیر می‌تواند صفر باشد؟
(۱) فقط ظرفیت گرمایی ویژه دو جسم یکسان باشد.
(۲) این حالت امکان ندارد عملاً رخ دهد.
(۳) دمای دو جسم قرینه و فقط جرم‌ها نابرابر باشند.
(۴) از دمای دو جسم، یکی منفی و دیگری مثبت باشد.

حل. گزینهٔ(۱) درســـت نیســـت زیـــرا با یکســـان بودن ظرفیت‌های ویژه رابطه (۶) برقرار اســـت و چون جرم‌ها برابر نیستند پس دمای تعادل نمی‌تواند صفر باشد.
گزینهٔ (۳) نیز درســـت نیست زیرا همان شرایط گزینه (۱) برقرار بوده و چون جرم‌ها برابر نیســـتند لـــذا با قرینه بودن دماها، دماهای تعادل نمی‌تواند صفر شود.
گزینهٔ (۴) صحیح اســـت زیرا بنا به رابطه کلی (۵) در تمام حالت‌هایی که $m_1c_1=m_2c_2$ باشـــد، دمای تعادل صفر است. به‌ویژه زمانی که جرم‌ها با هم و ظرفیت‌ها با هم برابر باشـــند، رابطهٔ (۵) به رابطهٔ (۷) تبدیل می‌شود که با قرینه بودن دماها، دمای تعادل صفر خواهد شد.

مثال۴،۲. جســـم اول با دمای θ_1 و جسم دوم با دمای θ_2 مفروض‌اند. اگر $\theta_1<\theta_2<0$ کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟
(۱) دمای تعادل می‌تواند برابر $2\theta_2$ باشد.
(۲) دمای تعادل ممکن است $\frac{\theta_1}{2}$ باشد.
(۳) دمای تعادل ممکن است θ_2 باشد.
(۴) دمای تعادل می‌تواند برابر $\frac{1}{3}\theta_1+\frac{2}{3}\theta_2$ باشد.

حل. بنا به نتیجه (i) واضح است گزینه (۴) درست است.

مثال۵،۲. جرم یک جسم دو برابر جرم جسم دیگر و هر دو جسم هم‌جنس هستند. اگر دمای جسم اول ۲ درجه بیشتر از دمای جسم دوم باشد، دمای تعادل چند درجه بیشتر از دمای جسم دوم خواهد بود؟

(۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) ۳

حل. چون ظرفیت‌ها برابرند لذا رابطهٔ (۶) برقرار اســـت. با قرار دادن $m_1=2m_2$ و $\theta_1=\theta_2+2$ در این رابطه معلوم می‌شود گزینهٔ (۳) صحیح است. توجه داریم دمای جسم اول از دمای جسم دوم بیشتر است.

مثال۶،۲. دو جســـم در مجاورت گرمایی قرار می‌گیرند و اتلاف انرژی وجود نـــدارد. در صورتی‌که $m_1=m_2$ و $c_2=2c_1$ باشـــد، دمای تعادل برابر ۵ درجه سلســـیوس می‌شود و اگر $c_1=c_2$ و $m_1=2m_2$ باشـــد، دمـــای تعـــادل برابـــر ۱۰ درجه سلسیوس می‌شود. دمای جسم گرم‌تر کدام است؟

(۱) $0\,^\circ C$
(۲) $15\,^\circ C$
(۳) $10\,^\circ C$
(۴) $5\,^\circ C$

حل. در حالتی که جرم ها برابرند از رابطه (۹) و زمانی‌که ظرفیت‌هـــا برابرند از رابطهٔ (۶) اســـتفاده می‌کنیم. از این دو رابطه، دو معادله دو مجهولی به دســـت می‌آید که بعد از حل آن‌ها دمای اجسام برابر $0\,^\circ C$ و $15\,^\circ C$ می‌شوند. پس گزینهٔ (۲) درست است.

نتیجـــه نهایی اینکه، تمام مثال‌های بـــالا را می‌توان تنها با رابطـــهٔ کلی (۴) حل کرد. اما تحلیل‌های ریاضی بالا ســـبب می‌شوند مسئله‌ها با دید وسیع‌تر و در زمان کمتر حل شوند. در واقع ریاضی و فیزیک نقاط مشترک زیادی داشته و ریاضی می‌تواند زبان بیان و تفسیر رابطه‌های فیزیک تلقی شود.

پی‌نوشت
۱. محیطی که عایق‌بندی شده و تبادل گرمایی با بیرون ندارد.

منبع
۱. شورای برنامه‌ریزی و تألیف گروه فیزیک، **فیزیک (۱)**، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه، چاپ اول ۱۳۹۵.